أي : $\qquad (2) \qquad \|x\|_0 \le B.\|x\|$

من (1),(2) نجد أن النظيمين متكافئان .

ولما كان $\|x\|$ اختياريا على الفضاء E هذا يعني أن النظيم $\|x\|_0$ يكافئ أي نظيم معرف على E وبالتالي جميع النظائم تكون متكافئة .

<u>جواب السؤال الثالث (١٠+١٠=٢٠درجة) :</u>

١) إن الفضاء $C[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي فإنه ليس فضاء هيلبرت .
سنبين أنّ النظيم المعرف بالمساواة $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ لا يمكن أن يولد من جداء داخلي لكونه لا يحقق مساواة متوازي الأضلاع وفي الحقيقة إذا أخذنا: $x(t)=1$ و $y(t)=\frac{t-a}{b-a}$ فإننا نجد أن : $\|x\|=1$ و $\|y\|=1$ وأن:

$$x(t)+y(t)=1+\frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t)-y(t)=1-\frac{t-a}{b-a}$$

من هنا نجد أن $\|x+y\|=2$ و $\|x-y\|=1$ وأن $2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=4$

في حين أن : $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5$

بذلك فإن مساواة متوازي الأضلاع غير محققة.

٢)- ليكن x_1,x_2 عنصرين من $M^\perp$ عندئذ أيا كان $y\in M$ فإن :

$$(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y)=\lambda_1(x_1,y)+\lambda_2(x_2,y)=0+0=0$$

حيث λ_1,λ_2 عددان عقديان وبذلك يكون $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$ عنصرا من $M^\perp$.
لتكن $\{x_n\}$ أية متتالية من عناصر $M^\perp$ بحيث أن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ولنبرهن أن $x\in M^\perp$.
في الواقع أيا كان $y\in M$ يكون لدينا $(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$ إذا $x\in M^\perp$ وهذا يعني أن $M^\perp$ مغلقة.

<u>جواب السؤال الرابع (١٠+١٠=٢٠ درجة) :</u>

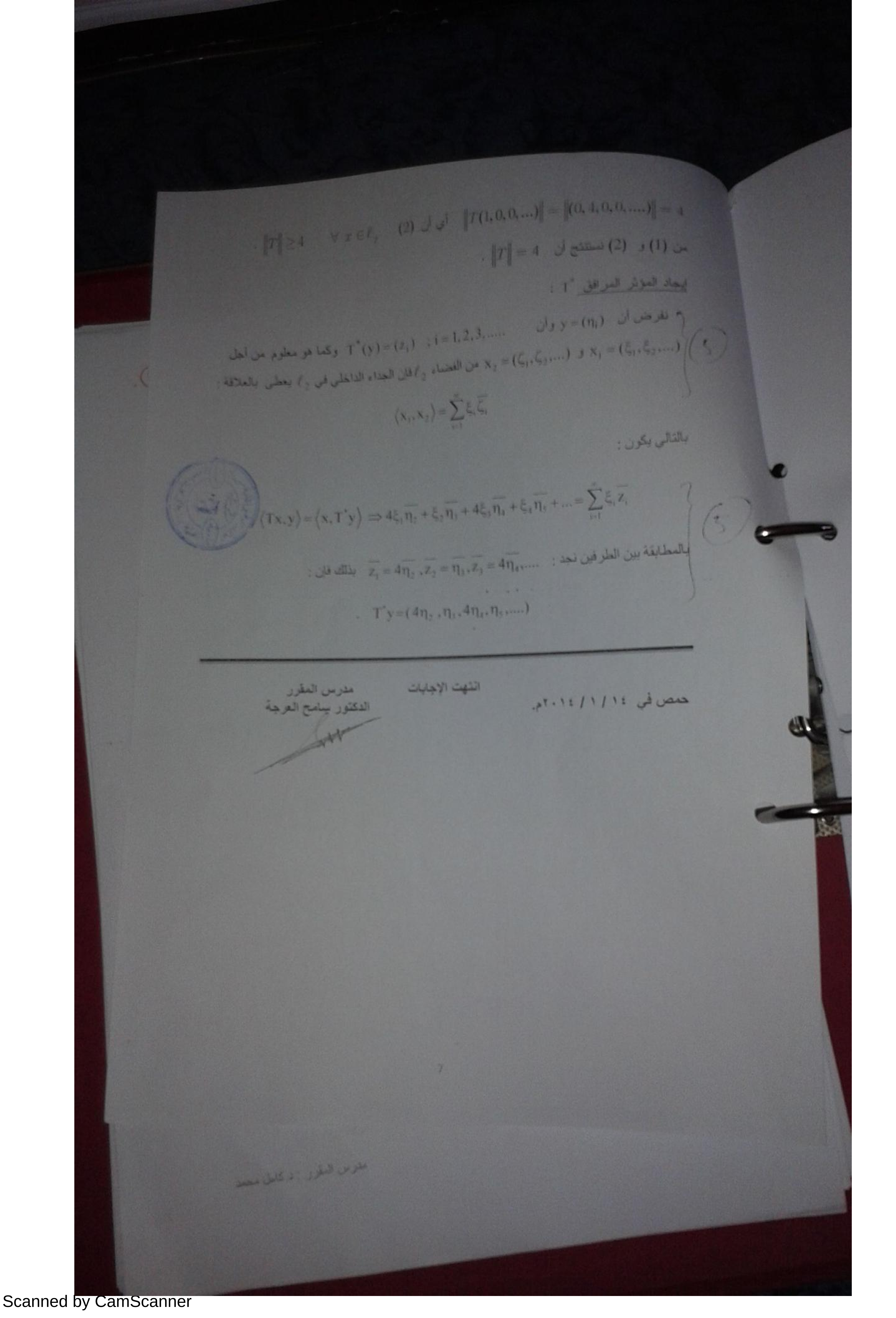
أ)- لنبين أولا أن $(T^*)^*=T$:

$(y,(T^*)^*x)=(T^*y,x)=\overline{(x,T^*y)}=\overline{(Tx,y)}=(y,Tx)$ وبالتالي فإن $(T^*)^*x=Tx$ وذلك من أجل كل $x\in H$ وبالتالي $(T^*)^*=T$.

ثانيا : بما أن $\|T\|=\|T^*\|$ فإن: $\|T^*T\|\le\|T^*\|.\|T\|=\|T\|^2$

ومن جهة أخرى :

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(T^*Tx,x)\le\|T^*Tx\|\|x\|\le\|T^*T\|.\|x\|^2$$



$\|T(1,0,0,\ldots)\| = \|(0,4,0,0,\ldots)\| = 4$ أي أن (2) $\forall x \in \ell_2$ $\|T\| \geq 4$.

من (1) و (2) نستنتج أن $\|T\| = 4$.

إيجاد المؤثر المرافق T^* :

نفرض أن $y = (\eta_i)$ وأن $T^*(y) = (z_i)$; $i = 1, 2, 3, \ldots$ وكما هو معلوم من أجل $x_1 = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ و $x_2 = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$ من الفضاء ℓ_2 فإن الجداء الداخلي في ℓ_2 يعطى بالعلاقة :

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\zeta_i}$$

بالتالي يكون :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \Rightarrow 4\xi_1 \overline{\eta_2} + \xi_2 \overline{\eta_3} + 4\xi_3 \overline{\eta_4} + \xi_4 \overline{\eta_5} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{z_i}$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد : $\overline{z_1} = 4\overline{\eta_2}, \overline{z_2} = \overline{\eta_3}, \overline{z_3} = 4\overline{\eta_4}, \ldots$ بذلك فإن :

$T^* y = (4\eta_2, \eta_3, 4\eta_4, \eta_5, \ldots)$.

حمص في ١٤ / ١ / ٢٠١٤م.

انتهت الإجابات

مدرس المقرر
الدكتور بسامح العرجة

مدرس المقرر : د.كامل محمد

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الفصل الأول ٢٠١٣-٢٠١٤
أسئلة مقرر التحليل التابعي (١)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

المدة : ساعتان
العلامة : (١٠٠) درجة
الاسم :

السؤال الأول (١٠+١٠= ٢٠درجة) :

أ)- عرف المنظم الكلي ، ثم بين إن كل p- نصف نظيم على X هو منظم على X ، أما العكس غير صحيح دوما .

ب)- عرف الفضاء $C^m[a,b]$ ، ثم أثبت أنه فضاء خطي منظم مع النظيم

$$\|f\|_{C^m} = \|f\|_C + \|f'\|_C + \|f''\|_C + ... + \|f^{(m)}\|_C$$

حيث $\|f\|_C = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

السؤال الثاني (١٥ درجة) :

أثبت أن جميع النظائم في الفضاء الخطي المنظم ذي n بعدا تكون متكافئة فيما بينها .

السؤال الثالث (١٠+١٠= ٢٠ درجة) :

١)- هل الفضاء $C[a,b]$ هو فضاء هيلبرت أثبت ذلك .

٢)- بفرض H فضاء هيلبرت ولتكن $M \subset H$ عرف المجموعة $M^{\perp}$ ثم بيّن أنها تشكل فضاء جزئيا مغلقا في فضاء هيلبرت H.

السؤال الرابع (١٠+١٠= ٢٠درجة) :

أ)- بفرض H , K فضاءي هيلبرت عقديين . وليكن $T \in B(H,K)$. أثبت أن $(T^*)^* = T$ ثم بيّن أن $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

ب)- بفرض H فضاء هيلبرت العقدي و I مؤثر المطابقة على H ، $T \in B(H), \lambda \in \mathbb{C}$ مؤثر ناظمي أثبت أن $T - \lambda I$ مؤثر ناظمي .

السؤال الخامس (٢٥ درجة) :

ليكن المؤثر T حيث : $T: \ell_2 \to \ell_2$ معرف بالآتي:

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, ...) = (0, 4\xi_1, \xi_2, 4\xi_3, \xi_4, ...)$$

أثبت أن T مؤثر خطي ومحدود ثم أوجد $\|T\|$ وأوجد T^* .

انتهت الأسئلة

حمص في ٢٧ / ١ / ٢٠١٤م. مع التمنيات بالنجاح والتوفيق

مدرس المقرر
الدكتور سامح العرجة

وبما أن $f(t)(u) \in Ker(T)$ ... $f(t)(Ker(I)) \subseteq Ker(T)$.
وبما أن ... إما $Ker(T) = 0$ أو $Ker(T) = V$.
إذا كان $Ker(T) = V$ ... $T = 0$ ... المطلوب .

جامعة البعث	سلم تصحيح مقرر التحليل التابعي (١)	المدة : ساعتان
كلية العلوم	لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي	العلامة : (١٠٠) درجة
قسم الرياضيات	امتحان الفصل الأول ٢٠١٣-٢٠١٤	

جواب السؤال الأول (١٠+١٠=٢٠ درجة) :

أ)- تعريف المنظم الكلي : بفرض (X,d) فضاء متريا خطيا ولنعرف التابع $g(x)$:

$$g(x)=d(x,\theta)$$

حيث θ صفر الفضاء X.

عندئذٍ فإن g يحقق الشروط الآتية :

$$1)\quad g:X\to\mathbb{R}$$

$$2)\quad g(x)=0\Leftrightarrow x=\theta$$

$$3)\quad g(x)=g(-x)\ :\ \forall x\in X$$

$$4)\quad g(x+y)\le g(x)+g(y)$$

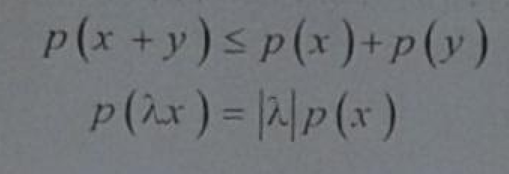
5) إذا كانت $\lambda_0,\lambda_n\in\mathbb{C}$ و $a,x_n\in X$ بحيث أن :

$x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a \wedge \lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda_0$ عندئذٍ يكون $g(x_n-a)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

وإذا كانت $\lambda_n x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda_0 a$ يكون $g(\lambda_n x_n-\lambda_0 a)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

إنّ كل p- نصف نظيم على X هو منظم على X. (العكس غير صحيح في العموم).

لدينا :



$$p(x+y)\le p(x)+p(y)$$

$$p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$$

وبالتالي فإنّ :

$$p:X\to R$$

$$p(\theta)=p(0.x)=0$$

$$p(-x)=|-1|.p(x)=p(x)$$

$$p(x+y)\le p(x)+p(y)$$

لنبين أن :

$$p(\lambda_n x_n-\lambda_0 a)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\ ;\ \lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda_0\wedge x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$$

$$\lambda_0,\lambda_n\in\mathbb{C}\ ;\ x_n,a\in X$$

نضيف ونطرح $\pm\lambda_0 x_n$:

$$p(\lambda_n x_n-\lambda_0 a)\le|\lambda_n-\lambda_0|p(x_n-a)+|\lambda_0|p(x_1-a)+|\lambda_n-\lambda_0|p(a)$$

فمن كون $n\to\infty$ فإن :

$$p(\lambda_n x_n-\lambda_0 a)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

من تحقق هذه الشروط نجد أن p هو منظم .

ليكن لدينا : $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^{p_k}\ :\ p_k=\frac{1}{k}\ ,\ k\in N$

إن $g(x)$ منظم . نلاحظ أن : $g(2x)\ne 2.g(x)$ وبالتالي ليس كل منظم هو نصف نظيم .

نلاحظ أن $S(T)(u)\in Ker(T)$ وبالتالي $S(T)(Ker(T))\subseteq Ker(T)$.
وبما أن التمثيل غير ردود عندئذ إما $Ker(T)=0$ أو $Ker(T)=V$.
إذا كان $Ker(T)=V$ عندئذ يكون $T=0$ وهذا يتم المطلوب.

ب)- الفضاء $C^m[a,b]$ رمز لمجموعة كل التوابع التي تملك مشتقات موجودة ومستمرة حتى المرتبة m. لنثبت أولاً أنه فضاء خطي . بما أن $C^m[a,b] \subseteq C[a,b]$ يكفي أن نثبت أن : $\lambda f + \mu g \in C^m[a,b]$ من أجل $f, g \in C^m[a,b]$ & $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ وهذا محقق حسب خواص اشتقاق التوابع وجمعها . (يمكن للطالب إثبات تحقق شروط الفضاء الخطي فيحصل على علامة الفقرة) . وهنا العنصر الحيادي هو التابع الصفري ، وأن $-f^m$ نظير العنصر f^m .

2

2

ثانياً لنثبت أنه منظم بأن نبين أن النظيم المعرف على $C^m[a,b]$ يحقق شروط النظيم .

$$\|f\|_{C^m} = \|f\|_C + \|f'\|_C + \|f''\|_C + ... + \|f^{(m)}\|_C$$

حيث $\|f\|_C = \max_{x \in I} |f(x)|$.

2

1) $\|f\|_{C^m} = \|f\|_C + \|f'\|_C + \|f''\|_C + ... + \|f^{(m)}\|_C \geq 0$

لأن كلا من $\|f\|_C, \|f'\|_C, \|f''\|_C, ..., \|f^{(m)}\|_C$ محققة لشروط النظيم في $C[a,b]$ فجميعها موجبة . ويكون :

$$\|f\|_{C^m} = 0 \Leftrightarrow \|f\|_C + \|f'\|_C + \|f''\|_C + ... + \|f^{(m)}\|_C = 0 \Leftrightarrow$$

$$\|f\|_C = \|f'\|_C = \|f''\|_C = ... = \|f^{(m)}\|_C = 0 \Leftrightarrow f = \theta$$

2

2) $\|\lambda f\|_{C^m} = \|\lambda f\|_C + \|\lambda f'\|_C + \|\lambda f''\|_C + ... + \|\lambda f^{(m)}\|_C =$

$$|\lambda|(\|f\|_C + \|f'\|_C + \|f''\|_C + ... + \|f^{(m)}\|_C) = |\lambda| \|f\|_{C^m}$$

2

3) $\forall f, g \in C^m[a,b]$ فإنه وحسب الشروط التي يحققها النظيم في $C[a,b]$ يكون :

$$\|f+g\|_{C^m} = \|f+g\|_C + \|f'+g'\|_C + \|f''+g''\|_C + ... + \|f^{(m)} + g^{(m)}\|_C \leq$$

$$\leq \|f\|_C + \|f'\|_C + \|f''\|_C + ... + \|f^{(m)}\|_C + \|g\|_C + \|g'\|_C + \|g''\|_C + ... + \|g^{(m)}\|_C = \|f\|_{C^m} + \|g\|_{C^m}$$

نستنتج أن شروط النظيم محققة وبالتالي $C^m[a,b]$ فضاء خطي منظم مع النظيم المعطى $\|f\|_{C^m}$.

جواب السؤال الثاني (١٥ درجة) :

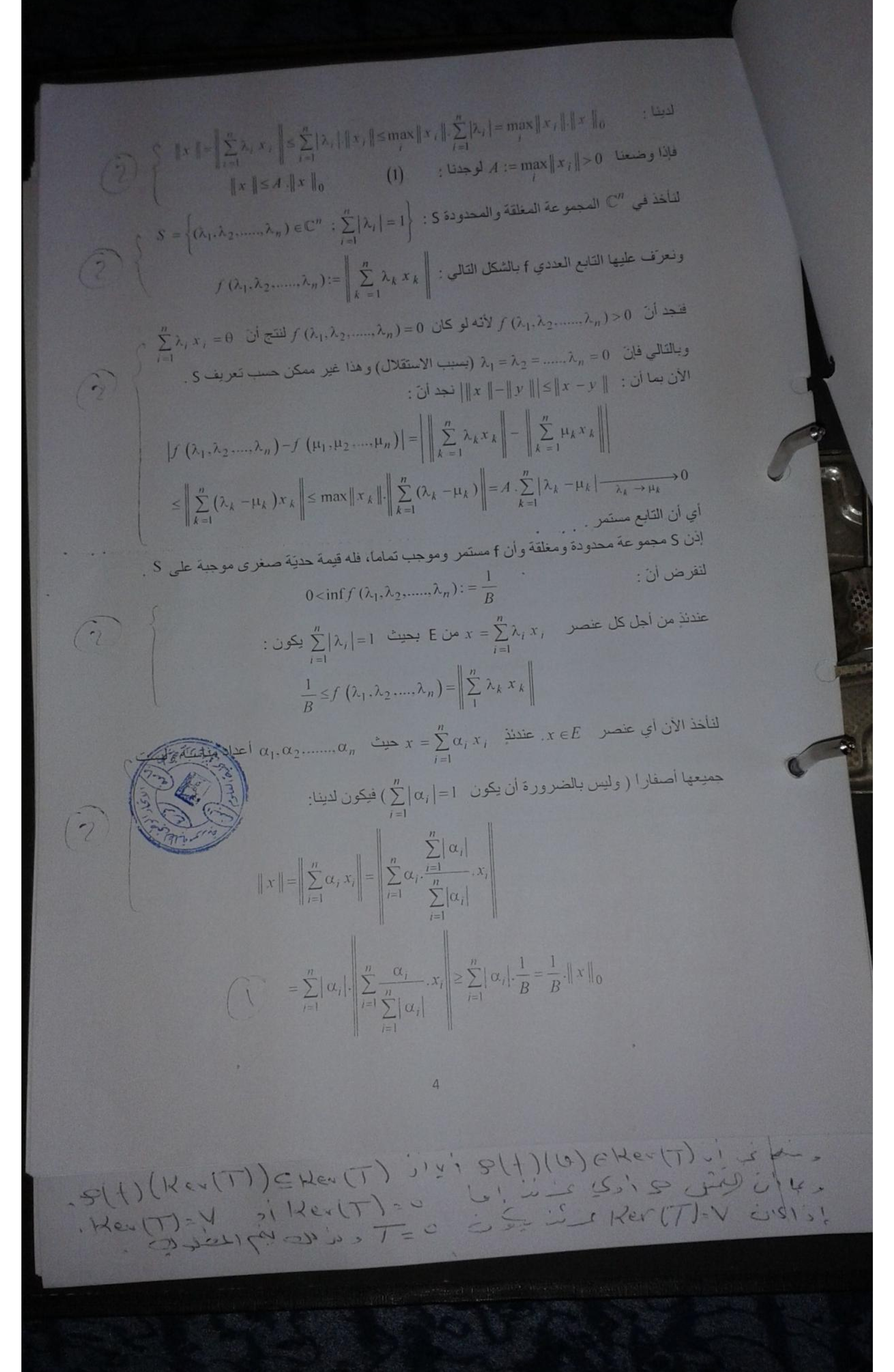
ليكن E أي فضاء خطي منظم بحيث $\dim E = n$ فتوجد فيه قاعدة $x_1, x_2, ..., x_n$ بحيث ان كل عنصر $x \in E$ يكتب بشكل وحيد كما يلي :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad (\text{حيث : } \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \text{ أعداد مناسبة})$$

2

ليكن الآن $\|\cdot\|$ أي نظيم في E ولنبرهن أنه يكافئ النظيم $\|\cdot\|_0$ المعرف بالشكل $\|x\|_0 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$.

ومنه $\varphi(t)(u) \in Ker(T)$ وبالتالي $\varphi(t)(Ker(T)) \subseteq Ker(T)$.
وبما أن التمثيل غير قابل للاختزال فإما $Ker(T) = 0$ أو $Ker(T) = V$.
إذا كان $Ker(T) = V$ عندئذ يكون $T = 0$ وذلك يتم المطلوب .



لدينا :

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\| \le \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\,\|x_i\| \le \max_i \|x_i\| . \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = \max_i \|x_i\| . \|x\|_0$$

فإذا وضعنا $A := \max_i \|x_i\| > 0$ لوجدنا :

$$\|x\| \le A.\|x\|_0 \qquad (1)$$

لنأخذ في $\mathbb{C}^n$ المجموعة المغلقة والمحدودة S :

$$S = \left\{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1\right\}$$

ونعرّف عليها التابع العددي f بالشكل التالي :

$$f(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots,\lambda_n) := \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right\|$$

فنجد أن $f(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots,\lambda_n) > 0$ لأنه لو كان $f(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots,\lambda_n) = 0$ لنتج أن $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \theta$

وبالتالي فإن $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\ldots \lambda_n = 0$ (بسبب الاستقلال) وهذا غير ممكن حسب تعريف S .

الآن بما أن : $\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x - y\|$ نجد أن :

$$|f(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) - f(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)| = \left|\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right\| - \left\|\sum_{k=1}^{n} \mu_k x_k\right\|\right|$$

$$\le \left\|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k) x_k\right\| \le \max\|x_k\| . \left\|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k)\right\| = A.\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \mu_k| \xrightarrow[\lambda_k \to \mu_k]{} 0$$

أي أن التابع مستمر . . . .

إذن S مجموعة محدودة ومغلقة وأن f مستمر وموجب تماما، فله قيمة حدية صغرى موجبة على S .

لنفرض أن :

$$0 < \inf f(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\ldots,\lambda_n) := \frac{1}{B}$$

عندئذٍ من أجل كل عنصر $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ من E بحيث $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| = 1$ يكون :

$$\frac{1}{B} \le f(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = \left\|\sum_{1}^{n} \lambda_k x_k\right\|$$

لنأخذ الآن أي عنصر $x \in E$ ، عندئذٍ $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ حيث $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_n$ أعداد ليست

جميعها أصفارا (وليس بالضرورة أن يكون $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 1$) فيكون لدينا:

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \frac{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|}{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|} . x_i\right\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| . \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|} . x_i\right\| \ge \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| . \frac{1}{B} = \frac{1}{B} . \|x\|_0$$

ومنه نجد أن $S(f)(u) \in Ker(T)$ أي أن $S(f)(Ker(T)) \subseteq Ker(T)$ ،
وبما أن الفضاء ... إما $Ker(T) = 0$ أو $Ker(T) = V$.
إذا كان $Ker(T) = V$ ... $T = 0$ وهذا ما ...

أي :
(2)

من (1),(2) نجد أن النظيمين متكافئان . $\|x\|_0 \le B.\|x\|$

ولما كان $\|x\|$ اختيارياً على الفضاء E هذا يعني أن النظيم $\|x\|_0$ يكافئ أي نظيم معرف على E وبالتالي جميع النظائم تكون متكافئة .

جواب السؤال الثالث (١٠+١٠=٢٠درجة) :

١) إن الفضاء $C[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي فإنه ليس فضاء هيلبرت .

سنبين أنّ النظيم المعرف بالمساواة $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$ لا يمكن أن يولد من جداء داخلي لكونه لا يحقق مساواة متوازي الأضلاع وفي الحقيقة إذا أخذنا: $x(t)=1$ و $y(t)=\frac{t-a}{b-a}$ فاننا نجد ان $\|x\|=1$ و $\|y\|=1$ وأن:

$$x(t)+y(t)=1+\frac{t-a}{b-a}$$

$$x(t)-y(t)=1-\frac{t-a}{b-a}$$

من هنا نجد أنّ $\|x+y\|=2$ و $\|x-y\|=1$ وأنّ $2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=4$

في حين أنّ :

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5$$

بذلك فإن مساواة متوازي الأضلاع غير محققة.

٢)- ليكن x_1,x_2 عنصرين من $M^\perp$ عندئذٍ أيا كان $y\in M$ فإن :

$$\langle \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2 , y\rangle = \lambda_1\langle x_1,y\rangle+\lambda_2\langle x_2,y\rangle = 0+0=0$$

حيث λ_1,λ_2 عددان عقديان وبذلك يكون $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$ عنصراً من $M^\perp$.

لتكن $\{x_n\}$ أية متتالية من عناصر $M^\perp$ بحيث إن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ولنبرهن أن $x\in M^\perp$.

في الواقع أيا كان $y\in M$ يكون لدينا $\langle x,y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n,y\rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$ إذا $x\in M^\perp$ وهذا يعني أن $M^\perp$ مغلقة.

جواب السؤال الرابع (١٠+١٠=٢٠ درجة) :

أ)- لنبين أولا أن $(T^*)^*=T$:

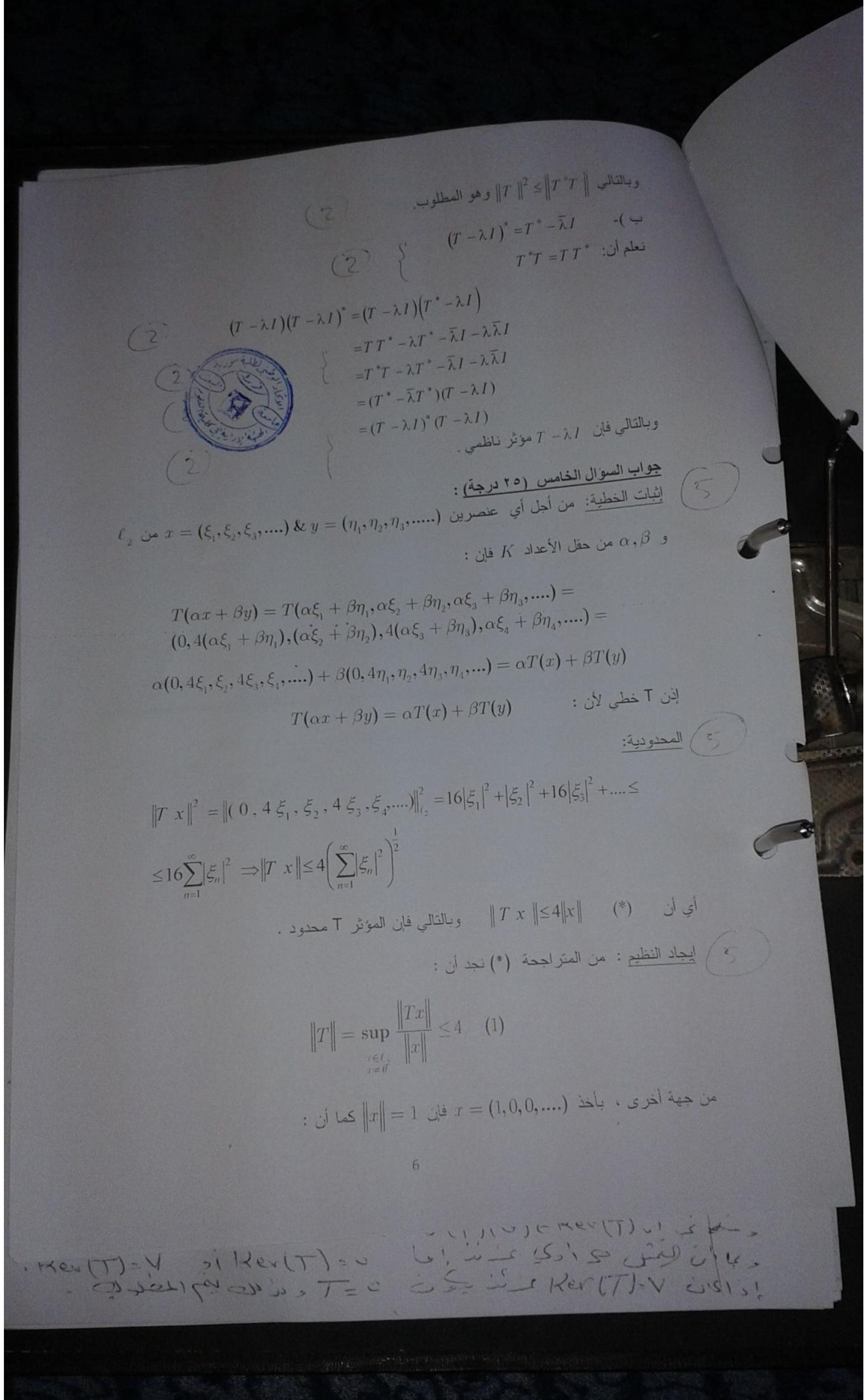
$(y,(T^*)^*x)=(T^*y,x)=\overline{(x,T^*y)}=\overline{(Tx,y)}=(y,Tx)$ وبالتالي فإن $(T^*)^*x=Tx$ وذلك من أجل كل $x\in H$ وبالتالي $(T^*)^*=T$.

ثانيا : بما أن $\|T^*\|=\|T\|$ فإن: $\|T^*T\|\le\|T^*\|.\|T\|=\|T\|^2$

ومن جهة أخرى :

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(T^*Tx,x)\le\|T^*Tx\|\|x\|\le\|T^*T\|.\|x\|^2$$

Scanned by CamScanner



وبالتالي $\|T\|^2 \le \|T^*T\|$ وهو المطلوب.

ب)- $(T-\lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I$

نعلم أن: $T^*T = TT^*$

$$(T-\lambda I)(T-\lambda I)^* = (T-\lambda I)(T^* - \bar{\lambda} I)$$
$$= TT^* - \lambda T^* - \bar{\lambda} I - \lambda\bar{\lambda} I$$
$$= T^*T - \lambda T^* - \bar{\lambda} I - \lambda\bar{\lambda} I$$
$$= (T^* - \bar{\lambda} T^*)(T - \lambda I)$$
$$= (T-\lambda I)^*(T-\lambda I)$$

وبالتالي فإن $T-\lambda I$ مؤثر ناظمي .

جواب السؤال الخامس (٢٥ درجة) :

إثبات الخطية: من أجل أي عنصرين $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,....)$ & $y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,.....)$ من ℓ_2

و α,β من حقل الأعداد K فإن :

$$T(\alpha x+\beta y) = T(\alpha\xi_1+\beta\eta_1, \alpha\xi_2+\beta\eta_2, \alpha\xi_3+\beta\eta_3,....) =$$
$$(0, 4(\alpha\xi_1+\beta\eta_1), (\alpha\xi_2+\beta\eta_2), 4(\alpha\xi_3+\beta\eta_3), \alpha\xi_4+\beta\eta_4,....) =$$
$$\alpha(0,4\xi_1,\xi_2,4\xi_3,\xi_4,....) + \beta(0,4\eta_1,\eta_2,4\eta_3,\eta_4,...) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

إذن T خطي لأن :
$$T(\alpha x+\beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

المحدودية:

$$\|Tx\|^2 = \|(0, 4\xi_1, \xi_2, 4\xi_3, \xi_4,....)\|_{\ell_2}^2 = 16|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + 16|\xi_3|^2 + ... \le$$
$$\le 16\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2 \Rightarrow \|Tx\| \le 4\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

أي أن $\|Tx\| \le 4\|x\|$ (*) وبالتالي فإن المؤثر T محدود .

إيجاد النظيم : من المتراجحة (*) نجد أن :

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\ell_2 \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le 4 \quad (1)$$

من جهة أخرى ، بأخذ $x=(1,0,0,....)$ فإن $\|x\|=1$ كما أن :

وبما أن النواة هي إما ... إما Ker(T) = 0 أو Ker(T) = V .
إذا كان Ker(T) = V عندئذ يكون T = 0 وهذا يتم المطلوب .

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

أسئلة مقرر التحليل التابعي (١)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

العلامة : (١٠٠) درجة
الاسم :

السؤال الأول (١٥ درجة) :

أثبت أن جميع النظم في الفضاء الخطي المنتظم ذي n بعداً تكون متكافئة فيما بينها .

السؤال الثاني (٢٠ درجة) :

بفرض أن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عناصر متعامدة مثنى مثنى في الفضاء H ومغايرة للصفر برهن صحة مساواة فيثاغورث :

$$\|x_1+x_2+\ldots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\ldots+\|x_n\|^2$$

السؤال الثالث (١٥ درجة) :

لتكن $h_1, h_2, h_3, \ldots$ جملة متعامدة نظامية في فضاء هيلبرت H. اثبت إذا كان $\langle x, h_k\rangle=0$ $(k=1,2,3,\ldots)$ فإن $x=\theta$ إذا وفقط إذا كانت الجملة $h_1, h_2, h_3, \ldots$ تامة في H .

السؤال الرابع (١٥ درجة) :

برهن أن جميع فضاءات هيلبرت الفصولة وغير المنتهية البعد إيزومورفية مع الفضاء ℓ_2 وبالتالي جميع هذه الفضاءات إيزومورفية لبعضها البعض .

السؤال الخامس (٢٠ درجة) :

ليكن x, y عنصرين من فضاء هيلبرت برهن صحة التكافؤ :

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\| \quad , \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

($\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة) .

السؤال السادس (١٥ درجة) :

اثبت أن للمعادلة التكاملية :

$$x(t)=\lambda \int_a^t k(t,u)\, x(u)\, du+\Phi(t)$$

حل وحيد $x(t)$ مستمرّ على المجال $[a,b]$، حيث $k(t,u)$ تابع مستمر على المربّع $[a,b]\times[a,b]$ و λ وسيط اختياري و $\Phi(t)$ تابع مستمر على المجال $[a,b]$.

انتهت الأسئلة
مع التمنيات بالنجاح والتوفيق

حمص في / ٧ / ٢٠١٢م.

مدرس المقرر
الدكتور سامح العرجة

جامعة البعث | امتحانات الدورة الثالثة الصيفية ٢٠١٠-٢٠١١ | المدة : ساعتان

كلية العلوم | أسئلة مقرر التحليل التابعي (١) | العلامة:(١٠٠) درجة

قسم الرياضيات | لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي | الاسم : [redacted]

السؤال الأول (٢٠ درجة):

أثبت أن الربع الأول من المستوي العقدي $E=\{Z=x+i\,y \mid x>0, y>0\}$ مجموعة محدبة وغير متوازنة وغير ماصة.

السؤال الثاني (٢٠ درجة):

ليكن H_1 فضاء جزئي من فضاء هيلبرت H ، أثبت أن أي x من H تكتب بالشكل $x=x_1+x_2$ حيث $x_1 \in H_1, x_2 \in H_1^{\perp}$ و هذا التمثيل وحيد .

السؤال الثالث (٢٠ درجة):

ليكن لدينا : $x_3(t)=1$ ، $x_2(t)=t$ ، $x_1(t)=t^2$ حوّل x_1, x_2, x_3 إلى عناصر متعامدة نظامية على $[-1,+1]$ بالنسبة للجداء الداخلي المعرّف بالشكل : $(x,y)=\int_{-1}^{1} x(t).y(t)\,dt$

ثم بيّن كيف تكتب هذه العناصر بدلالة القاعدة .

السؤال الرابع (١٠+١٠=٢٠ درجة):

أ)- بفرض H , K فضاءا هيلبرت عقدي $T \in B(H,K)$ أثبت أن : $\ker T=\left(\operatorname{Im} T^*\right)^{\perp}$.

ب)- بفرض $S \in B(\ell^2)$ مؤثر خطي معرف بالشكل: $S(x_1,x_2,x_3,\dots\dots)=(0,x_1,x_2,x_3,\dots\dots)$

فأثبت أن: $S^*(y_1,y_2,y_3,\dots\dots)=(y_2,y_3,y_4,\dots\dots)$

السؤال الخامس (٢٠ درجة):

أوجد الفضاء $(\mathrm{R}^n)^*$ الفضاء المرافق للفضاء R^n حيث النظيم في R^n معطى بالشكل :

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \; x=(\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots, \lambda_n)$$

	انتهت الأسئلة	مدرس المقرر
حمص في ١٨ / ٨ / ٢٠١١ م.	مع التمنيات بالنجاح والتوفيق	الدكتور سامح العرجة

السؤال الأول (١٥+١٥=٣٠ درجة) :

ليكن (X_1,ρ_1) و (X_2,ρ_2) فضاءين متريين ، نعرف على الفضاء X حيث $X = X_1 \times X_2$ التابعين :

$$d_1(x,y) = \rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2)$$

$$d_2(x,y) = \left[\rho_1^2(x_1,y_1) + \rho_2^2(x_2,y_2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

حيث : $x = (x_1,x_2)$ و $y = (y_1,y_2)$ و $(i = 1,2)$ $x_i , y_i \in X_i$

أ)- اثبت أن d_2 تابع مسافة معرف على X .

ب)- عرف النظيمين المتكافئين ثم أوجد النظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ المولدين من d_1 و d_2 على الترتيب ،
واثبت أنهما نظيمين متكافئين .

السؤال الثاني (١٥ درجة) :

عرف فضاء باناخ ثم أثبت كل فضاء خطي منظم E ذو n بعدا هو فضاء باناخ .

السؤال الثالث (١٥ درجة) :

من أجل العنصران $x , y \in H$ أثبت صحة متراجحة شفارتز :

$$|(x,y)| \le \sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}$$

السؤال الرابع (١٥ درجة) :

ليكن H_1 فضاء خطيا جزئيا في فضاء هيلبرت H عندئذ كل عنصر $x \in H$ يمكن كتابته وبشكل وحيد بالشكل :

$$x = x_1 + x_2 \quad ; x_1 \in H_1 \ , \ x_2 \in H_1^{\perp}$$

السؤال الخامس (٢٥ درجة) :

بين أن المؤثر $T : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ المعرف بالدستور $y = (\eta_i) = T x$ حيث : $\eta_i = \frac{\xi_i}{i}$
و $x = (\xi_i)$ هو مؤثر خطي ومحدود ثم أوجد $\|T\|$. أوجد المؤثر المرافق T^* .



جامعة البعث   امتحانات الدورة(الإضافية) التكميلية 2013-2014   المدة : ساعة ونصف

كلية العلوم   أسئلة مقرر التحليل التابعي (1)   العلامة:(100) درجة

قسم الرياضيات   لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي   الاسم :

السؤال الأول (20 درجة):

عرف الفضاء $C[a,b]$ ثم أثبت أن $\|f\|_c = \max\limits_{x\in C[a,b]} |f(x)|$ يحقق شروط النظيم .

وبيّن أن الفضاء $C[a,b]$ تام مع هذا النظيم $\|f\|_c$.

السؤال الثاني (25 درجة):

أثبت أن جميع النظائم في الفضاء الخطي المنظم ذي n بعداً تكون متكافئة فيما بينها .

السؤال الثالث (20 درجة):

ليكن E فضاء خطيا منظما . عرف الفضاء المرافق ثم أثبت أن E^* فضاء تاما .

السؤال الرابع (15 درجة):

أثبت أن الفضاء $C[a,b]$ مع النظيم المعرف بالمساواة

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \quad ; \quad x \in C[a,b]$$

ليس فضاء هيلبرت .

السؤال الخامس (20 درجة):

ليكن المؤثر $A : C[0,\infty[\to C[0,\infty[$ المعطى بالشكل :

$A\,x(t) = t\;x(t)$. أثبت أن المؤثر A خطي وغير محدود لكنه مغلق .

انتهت الأسئلة   مدرس المقرر

حمص في 1/ 9 / 2014 م.   مع التمنيات بالنجاح والتوفيق   الدكتور سامح العرجة

السؤال الأول (٢٠درجة):

أ)- اثبت أن كل فضاء خطي منظم E انوني البعد هو فضاء باناخ .

ب)- إذا كان النظيم في $\mathbb{R}^2$ معطى بالعلاقة: $x = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \|x\| = |t_1| + |t_2|$

فماذا تمثل الكرة الواحدية في $\mathbb{R}^2$ بالنسبة لهذا النظيم مع التوضيح بالرسم .

ج)- عرف الفضاء $C^m[a,b]$. احسب في فضاء المتتاليات العددية المحدودنظيم العنصر x حيث :

$$x = \left\{ \frac{1}{n^2 - 10n + 28} \right\}_{n \ge 1}$$

السؤال الثاني (٢٥درجة):

أ)- اذا كانت $\mathcal{S}$ مجموعة كل المتتاليات العددية اللانهائية و بفرض d تابع معرف بالشكل:

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \quad ; x = \{x_n\}_{n \ge 1} \ , \ y = \{y_n\}_{n \ge 1}$$

أثبت أن d تابع مسافة . هل d مسافة لا متغيرة الانسحاب أم لا ؟ ولماذا ؟. ماهي الشروط الواجب تحققها حتى يكون$(\mathcal{S}, d)$ فضاء مترياً خطياً (من غير اثبات).

ب)- أوضح ، فيما اذا كان النظيمين الآتين متكافئين في الفضاء $C[0,1]$ ولماذا ؟

$$\|x\|_1 = \max_{0 \le t \le 1} |x(t)| \quad \& \quad \|x\|_2 = \left[\int_0^1 x^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

و هل هذا الفضاء فضاء جداء داخلي مع النظيم الأول $\|x\|_1$.

السؤال الثالث (١٥درجة):

أثبت أن التطبيق المعرف بالعلاقة : $A : C[0,1] \to C[0,1]$ حيث:

$A(f(x)) = \frac{1}{2} \int_0^1 x.t.f(t)dt + \frac{5}{6}$ هو تطبيق ضاغط . ثم أوجد النقطة الثابتة له .

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

ليكن المؤثر A من الفضاء $C[0,1]$ في نفسه والمعرف كالآتي :

$$Ax = \int_0^1 (t^2 + s^2)\, x(s) ds \qquad , \ t \in [0,1]$$

أثبت أن هذا المؤثر <u>خطي</u> و<u>محدود</u> وأوجد <u>نظيمه</u> ثم اوجد <u>المؤثر المرافق لـ</u> Aماذا <u>تستنتج</u> ؟.

السؤال الخامس (٢٠درجة):

ليكن A مؤثراً خطياً محدوداً من الفضاء الخطي المنظم E_1 في الفضاء الخطي المنظم E_2 ، أثبت ما يلي:

I - إذا كانت $D(A)$ مغلقة في الفضاء E_1 عندئذٍ يكون A مغلقاً.

II- إذا كان E_2 فضاءً تاماً وكان المؤثر A مغلقاً عندئذٍ تكون $D(A)$ مجموعة جزئية مغلقة في E_1 .

جامعة البعث | سلم تصحيح أسئلة مقرر التحليل التابعي (١) | المدة : ساعة ونصف
كلية العلوم | لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي | العلامة :(١٠٠) درجة
قسم الرياضيات | امتحانات الفصل الأول ٢٠١٤-٢٠١٥

١٠

جواب السؤال الأول (٢٠ درجة) :

أ)- لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ قاعدة في E ونأخذ أي متتالية كوشي $\{x^N\}$ في E .

عندئذ يكون: $N = 1,2,3,\ldots \quad ; \quad x^N = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^N x_i$ ومن أجل $i = 1,2,3,\ldots,n$ يكون لدينا :

(7)

$$\left|\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^{(M)}\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^{(M)}\right| = \left\|x^N - x^M\right\|_0 \xrightarrow[M \to \infty]{N \to \infty} 0$$

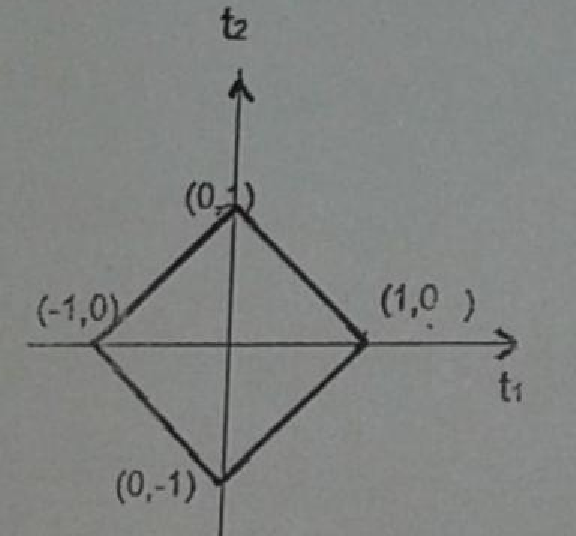
وهذا يعني أن المتتالية العددية $\{\lambda_i^{(N)}\}$ هي متتالية كوشي (أساسية) من أجل $i = 1,2,3,\ldots,n$ فهي متقاربة (التقارب هنا التقارب الإحداثي) . نفرض ان $\lambda_i^{(N)} \to \lambda_i^0$ (حيث $i = 1,2,3,\ldots,n$) وأن $x^0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^0 x_i$ فنجد أن : $\left\|x^N - x^0\right\|_0 = \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i^{(N)} - \lambda_i^0\right| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$ إذن E فضاء باناخ .

ب)- من خلال التنظيم : $x = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \|x\| = |t_1| + |t_2|$ نرى أن كرة الواحدة $S[\theta, 1]$ نقاط في المستوي هي مجموعة نقاط المستوي $\mathbb{R}^2$ والتي من أجلها يكون :

(6)

$$S[\theta, 1] = \left\{x = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : |t_1| + |t_2| \le 1\right\}$$

وهي بالنسبة للتنظيم المعرف أعلاه تمثل المربع الذي رؤوسه هي النقاط : $(1,0)$ و $(0,-1)$ و $(-1,0)$ و $(0,1)$ الواقعة على المحورين t_1 و t_2 ولها الشكل:



(7)

ج)- التعريف : الفضاء $C^m[a,b]$ رمز لمجموعة كل التوابع التي تملك مشتقات موجودة ومستمرة حتى المرتبة m .

لنأخذ التابع $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10x + 28}$ وبدراسة تغيرات التابع نجد أنه متزايد في المجال $[1,5]$ ومتناقص في الفترة $5 \le x < \infty$ وبالتالي فإن نظيمه في فضاء المتتاليات العددية المحدودة يكون :

$$\|x\| = \sup_n |y_n| = \sup_n \left|\frac{1}{n^2 - 10n + 28}\right| = \left|\frac{1}{25 - 50 + 28}\right| = \frac{1}{3}$$

اذن : $\|x\| = \frac{1}{3}$

جواب السؤال الثاني(٢٥ درجة) :

أ)- لنثبت أن d تابع مسافة ، حيث: $\xi,\eta\in s$; $d(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}$ لدينا :

$M_1)$ $d(\xi,\eta)\geq 0\ ,\ \forall\xi,\eta\in s$

$d(\xi,\eta)=0\Leftrightarrow \xi_n=\eta_n\ ;\ \forall n=1,2,\ldots\Leftrightarrow \xi=\eta$

$M_2)$ $d(\xi,\eta)=d(\eta,\xi)$

$M_3)$ لإثبات متراجحة **المثلث** نأخذ التابع المساعد التالي: $\varphi(t)=\frac{t}{1+t}\ ;\ t>0$

فنجد أن: $\varphi'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0\ ;\ t>0$ وبالتالي $\varphi(t)$ تابع متزايد دوماً. إذن من العلاقة

$|A+B|\leq|A|+|B|$، حيث A وB عددان حقيقيان، تنتج العلاقة: $\varphi(|A+B|)\leq\varphi(|A|+|B|)$

وبالتالي يكون لدينا:

$$\frac{|A+B|}{1+|A+B|}\leq\frac{|A|+|B|}{1+|A|+|B|}=\frac{|A|}{1+|A|+|B|}+\frac{|B|}{1+|A|+|B|}$$
$$\leq\frac{|A|}{1+|A|}+\frac{|B|}{1+|B|}$$

فإذا كانت الآن $\xi=\{\xi_n\}$ و $\eta=\{\eta_n\}$ و $\zeta=\{\zeta_n\}$ أية ثلاثة عناصر من s وعوضنا:

$A:=\xi_n-\eta_n$ و $B:=\eta_n-\zeta_n$ نجد : $\frac{|\xi_n-\zeta_n|}{1+|\xi_n-\zeta_n|}\leq\frac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}+\frac{|\eta_n-\zeta_n|}{1+|\eta_n-\zeta_n|}$

بضرب طرفي **هذه المتراجحة** بـ $\frac{1}{2^n}$ ومن ثم التجميع من 1 إلى ∞ نحصل على متراجحة المثلث:

$$d(\xi,\zeta)\leq d(\xi,\eta)+d(\eta,\zeta)$$

8

المسافة d **لا متغيرة الانسحاب** ; $x=\{x_n\},y=\{y_n\}$; $d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$ نلاحظ

أن : $|x_k-y_k|=|x_k+z_k-y_k-z_k|=|x_k+z_k-(y_k+z_k)|$ بذلك فإن

5

$d(x+z,y+z)=d(x,y)\ ;\ x,y,z\in X$ أي أن المسافة d لا متغيرة **الانسحاب** لحتى يكون

$(\mathcal{S},d)$ **فضاءً مترياً خطياً** يجب أن تكون d مع العملية الجمعية وعملية الجداء **بعدد مستمرتين في** d)

ب)- **تكافؤ** النظيمين $\|x\|_1$ & $\|x\|_2$;كما نعلم يكون النظيمان المعرفان **على نفس** الفضاء ،

اذا و **فقط** اذا نتج من تقارب متتالية ما وفق أحد النظيمين تقاربها بالنسبة للنظيم **الثاني** .

6

[illegible] $x_n(t)=t^n$ [illegible] بالنسبة للنظيم $\|x\|$ [illegible]

$$\|x_n\|_2=\left[\int_0^1 t^{2n}(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)=0$$

إلا أنها لا تتقارب بالنسبة للنظيم $\|x\|_1$ بسبب ان تقاربها وفق هذا النظيم يكافئ التقارب المنتظم ، وكما هو معروف ان تقارب هذه المتتالية الطبيعي (أو بشكل نقطي) من التابع :

$$x(t)=\begin{cases}0 & ;\ 0\le t<1\\ 1 & ;\ t=1\end{cases}$$

غير المستمر عند $x=1$ وبالتالي انهي لا تنتمي الى الفضاء $C[0,1]$ ، وهذا هو السبب في عدم تكافؤ النظيمين المفروضين.

- الفضاء $C[0,1]$ ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي فإنه ليس فضاء هيلبرت .

سنبين أنّ النظيم المعرف بالمساواة $\|x\|_1=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|$ لا يمكن أن يولد من جداء داخلي لكونه لا يحقق مساواة متوازي الأضلاع وفي الحقيقة إذا أخذنا: $x(t)=1$ و $y(t)=\frac{t-a}{b-a}$ فإننا نجد أن : $\|x\|=1$ وأنّ: $\|y\|=1$

$$x(t)+y(t)=1+\frac{t-a}{b-a}$$
$$x(t)-y(t)=1-\frac{t-a}{b-a}$$

من هنا نجد أنّ $\|x+y\|=2$ و $\|x-y\|=1$ وأنّ $2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=4$

في حين أنّ : $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=5$ بذلك فإن مساواة متوازي الأضلاع غير محققة.

<u>جواب السؤال الثالث (١٥ درجة) :</u>

$$d(Af_1,Af_2)=|Af_1-Af_2|=\frac{1}{2}\left|\int_0^1 xt\,[f_1(t)-f_2(t)]\,dt\right|$$

$$\le\frac{1}{2}\overbrace{\max_{\substack{0\le x\le1\\0\le t\le1}}|xt|}^{1=}\cdot\max_{0\le t\le1}|f_1(t)-f_2(t)|\le\frac{1}{2}\max_{t\in[0,1]}|f_1(t)-f_2(t)|=\frac{1}{2}d(f_1,f_2)$$

وبالتالي فإنّ A ضاغط . ومن أجل إيجاد النقطة الثابتة ,لنضع النقطة البدئية $f_0(x)=0$ ، ولنشكل المتتالية

$$f_1(x)=Af_0(x)=\frac{5}{6}x$$

$$f_2(x)=\lambda f_1(x)=\frac{5}{12}\int_0^1 x.t^2.dt+\frac{5}{6}x=\left(\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)x$$

$$f_3(x)=\lambda f_2(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)\int_0^1 x.t^2.dt+\frac{5}{6}x=\left(\frac{5}{6^3}+\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)x$$

....

$$f_n(x)=\lambda f_{n-1}(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 x.t.f_{n-1}(t).dt+\frac{5}{6}x$$

$$=\left(\frac{5}{6^n}+\frac{5}{6^{n-1}}+......+\frac{5}{6^3}+\frac{5}{6^2}+\frac{5}{6}\right)x$$

....

أي أن : $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{k\to\infty} 5x.\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{6}\right)^k=5x\frac{1/6}{1-1/6}=\frac{5}{5}x=x$

وبالتالي فإن النقطة الثابتة هي x لأن : $f(x)=x$.

جواب السؤال الرابع (٢٠ درجة): خمس درجات لكل إثبات ... ٤ X = ٢٠ ... درجة

إثبات الخطية : من أجل أي عنصرين $x,y\in C[0,1]$ و $\lambda,\mu\in C$ فإن :

$$A(\lambda x+\mu y)=\int_0^1(t^2+s^2)(\lambda x(s)+\mu y(s))ds=$$

$$\int_0^1(t^2+s^2)\lambda x(s)ds+\int_0^1(t^2+s^2)\mu y(s)ds=$$

$$\lambda\int_0^1(t^2+s^2)x(s)ds+\mu\int_0^1(t^2+s^2)y(s)ds=\lambda A(x)+\mu A(y)$$

إثبات المحدودية :

$$\|Ax\|=\max_{t\in[0,1]}\int_0^1(t^2+s^2)x(s)ds\le\max_{s\in[0,1]}|x(s)|\times\max_{t\in[0,1]}\int_0^1(t^2+s^2)x(s)ds=$$

$$\max_{s\in[0,1]}|x(s)|\times\max_{t\in[0,1]}\left|(t^2s+\frac{1}{3}s^3)\Big|_0^1\right|=\max_{s\in[0,1]}|x(s)| \times \max_{t\in[0,1]}\left|[illegible]\right|=\frac{4}{3}\|x\|$$

إذن : $\|Ax\|\le\frac{4}{3}\|x\|$

لإيجاد النظيم $\|A\|$: من المحدودية $\|Ax\|\le\frac{4}{3}\|x\|$ نجد أن : $\|A\|=\sup_{\substack{x\in C[0,1]\\ x\neq 0}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\le\frac{4}{3}$ (1)

من جهة ثانية نأخذ $x(s)=1$ عندئذ يكون $\|x\|=1$ ويكون :

1 $\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 (t^2+s^2)x(s)ds = \max_{t,s\in[0,1]} \int_0^1 (t^2+s^2).1ds =$

1 $\max_{t\in[0,1]} \left|(t^2 s + \frac{1}{3}s^3)\Big|_0^1\right| = \max_{t\in[0,1]} \left|(t^2+\frac{1}{3})\right| = \frac{4}{3}$.

1 . $\|A\| = \frac{4}{3}$: من(1) و (2) ينتج أن . (2) $\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \ge \|Ax\| = \frac{4}{3}$

<u>المؤثر المرافق لـ</u> A : لنكتب Ax بشكل آخر $x = \int_0^1 (t^2+s^2)\,x(s)ds = \int_0^1 K(t,s)\,x(s)ds$

حيث : $K(t,s) = \begin{cases} t^2+s^2 & ; s \le t \\ 0 & ; s > t \end{cases} \quad ; \ t \subset [0,1]$

بالتالي فإن : 1 $(Ax, y) = \int_0^1 \overline{y(s)} \int_0^t K(t,s)\,x(s)ds\,dt$

1 $= \int_0^1 x(s)ds \int_s^1 K(t,s)\overline{y(s)}\,dt = \int_0^1 x(s)ds \int_s^1 \overline{\overline{K(t,s)}\,y(s)}\,dt = (x, A^*y)$ 1

ومنه يكون 1 $A^*(y(S)) = \int_0^1 \overline{K(t,s)}\,y(t)dt = \int_0^1 (t^2+s^2)\,y(t)\,dt$

وهنا : $\overline{K(t,s)} = \overline{(t^2+s^2)} = t^2+s^2$. ولما نتج أن $A^* = A$ <u>نستنتج أن المؤثر مترافق ذاتياً</u> . 1

<u>جواب السؤال الخامس (٢٠ درجة) :</u>

<u>I-لتكن</u> المتتالية $\{x_n\} \subseteq D(A)$ متقاربة من x، ولتكن المتتالية $\{Ax_n\}$ متقاربة أيضاً. وبما أن $D(A)$ مغلقة عندئذ يكون: $x \in \overline{D(A)} = D(A)$ ويكون أيضاً $\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax$ ذلك لأن A مؤثر مستمر 5

بالاعتماد على خاصة المؤثر المغلق نستنتج أن A مؤثر مغلق. 5

<u>II-لنأخذ</u> أي عنصر $x \in \overline{D(A)}$ وبالتالي توجد متتالية $\{x_n\} \subseteq D(A)$ بحيث يكون $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ بـ أن A مؤثر خطي محدود إذن $\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \le \|A\|\,\|x_n - x_m\|$ 5

أي أن المتتالية $\{Ax_n\}$ هي متتالية كوشي في الفضاء E_2. وبما أن الفضاء E_2 تام عندئذ المتتالية $\{Ax_n\}$ تتقارب من عنصر في E_2 وليكن y أي أن: $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ وبما أن A مغلق، وبحسب خاصة المؤثر المغلق يكون $x \in D(A)$ كما أن $Ax = y$. لذلك فإن $D(A)$ مغلقة ذلك كون العنصر x اختيارياً من $\overline{D(A)}$

حمص ٢/٢/ ٢٠١٥ مدرسا المقرر

كلية العلوم
قسم الرياضيات

لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

الاسم :

السؤال الأول (١٠+١٠ =٢٠درجة) :

أ)- عرف المنظم الكلي ، ثم بيّن إنّ كل p- نصف نظيم على X هو منظم على X، أما العكس غير صحيح دوما .

ب)- عرف الفضاء $C^m[a,b]$ ، ثم أثبت أنه فضاء خطي منظم مع النظيم

$$\|f\|_{C^m} = \|f\|_C + \|f'\|_C + \|f''\|_C + \dots + \left\|f^{(m)}\right\|_C$$

حيث $\|f\|_C = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

السؤال الثاني (١٥ درجة) :

أثبت أن جميع النظائم في الفضاء الخطي المنظم ذي n بعدا تكون متكافئة فيما بينها .

السؤال الثالث (١٠+١٠ = ٢٠ درجة) :

١)- هل الفضاء $C[a,b]$ هو فضاء هيلبرت أثبت ذلك .

٢)- بفرض H فضاء هيلبرت ولتكن $M \subset H$ عرف المجموعة $M^{\perp}$ ثم بيّن أنها تشكل فضاء جزئيا مغلقا في فضاء هيلبرت H.

السؤال الرابع (١٠+١٠ = ٢٠درجة) :

أ)- بفرض H , K فضاءي هيلبرت عقديين . وليكن $T \in B(H,K)$. أثبت أن $(T^*)^* = T$ ثم بيّن أن $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

ب)- بفرض H فضاء هيلبرت العقدي و I مؤثر المطابقة على H, $T \in B(H), \lambda \in \mathbb{C}$ مؤثر ناظمي أثبت أن $T - \lambda I$ مؤثر ناظمي .

السؤال الخامس (٢٥ درجة):

ليكن المؤثر T حيث : $T: \ell_2 \to \ell_2$ معرف بالآتي:

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots) = (0, 4\xi_1, \xi_2, 4\xi_3, \xi_4, \dots)$$

أثبت أن T مؤثر خطي ومحدود ثم أوجد $\|T\|$ وأوجد T^* .

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر

٢ درجة)

f تابعان عقديان وكمولان حسب ستيلجس بالنسبة للدالة المتزايدة h على $[a,b]$ ومن اجل

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ عندئذ اثبت أن :

$$\int_a^b |f(x).g(x)|dh(x) \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dh(x)\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dh(x)\right)$$

فضاء خطي منظم منتهي البعد هو فضاء باناخ . ومتى الفضاء التبولوجي الخطي قابل للتنظيم .

٢٠ درجة):

اء ℓ_p حيث $(p \ne 2)$ ليس فضاء هيلبرت ، وهل هو فضاء باناخ (بدون اثبات).

$L_2[-\pi,\pi]$ تشكل العناصر :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},.......,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},......$$

لمية ، والمطلوب بيّن أن الجملة تامة وأن متسلسلة فورييه للتابع $f(x)$ من الفضاء $L_2[-\pi,\pi]$

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin n$ ، وما هي صيغة مساواة بارسيفال عندئذ ؟

٢٠ درجة):

من المجالين $]0,1[$ و $]0,\infty[$ هوميومورفيان فيما بينهما مع التطبيق $f(x)=\frac{x}{1-x}$.

فضاء الخطي المنظم E ، بيّن أنه يكفي كي يكون هذا الفضاء تاماً هو أن تكون كل متسلسلة

اً فيه متقاربة.

١٥ درجة):

: $A:C[0,\infty[\to C[0,\infty[$ المعرف بالشكل $Ax(t)=t\,x(t)$

A خطي وغير محدود و لكنّه مغلق .

(١٠+١٥= ٢٥ درجة):

اء خطياً منظماً .عرف الفضاء المرافق E^* ثم اثبت أن E^* فضاء تاماً .

العام للداليات الخطية في الفضاء $\mathbb{R}^n$ إذا أخذنا التنظيم في $\mathbb{R}^n$ من الشكل:

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

السؤال الأول (١٠+١٠ =٢٠درجة) :

أ)- عرف المنظم الكلي ، ثم بين أن كل p- تصف تظيم على X هو منظم على X ، أما العكس غير صحيح دوما .

ب)- عرف الفضاء $C^m[a,b]$ ، ثم اثبت أنه فضاء خطي منظم مع النظيم

$$\|f\|_{C^m}=\|f\|_C+\|f'\|_C+\|f''\|_C+\dots+\|f^{(m)}\|_C$$

حيث $\|f\|_C=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

السؤال الثاني (١٥ درجة) :

أثبت أن جميع النظائم في الفضاء الخطي المنظم ذي n بعدا تكون متكافئة فيما بينها .

السؤال الثالث (١٠+١٠= ٢٠ درجة) :

١)- هل الفضاء $C[a,b]$ هو فضاء هيلبرت اثبت ذلك .

٢)- بفرض H فضاء هيلبرت ولتكن $M\subset H$ عرف المجموعة $M^{\perp}$ ثم بين أنها تشكل فضاء جزئيا مغلقا في فضاء هيلبرت H.

السؤال الرابع (١٠+١٠= ٢٠درجة) :

أ)- بفرض H , K فضاءي هيلبرت عقديين . ولتكن $T\in B(H,K)$. اثبت أن $(T^*)^*=T$ ثم بين أن $\|T^*T\|=\|T\|^2$.

ب)- بفرض H فضاء هيلبرت العقدي و I مؤثر المطابقة على H , $T\in B(H),\lambda\in\mathbb{C}$ مؤثر ناظمي أثبت أن $T-\lambda I$ مؤثر ناظمي .

السؤال الخامس (٢٥ درجة):

ليكن المؤثر T حيث : $T:\ell_2\to\ell_2$ معرف بالآتي:

$$T(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\dots)=(0,4\xi_1,\xi_2,4\xi_3,\xi_4,\dots)$$

أثبت أن T مؤثر خطي ومحدود ثم أوجد $\|T\|$ وأوجد T^* .

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

أسئلة مقرر التحليل التابعي (١)
لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي

العلامة : (١٠٠) درجة
الاسم :

السؤال الأول (١٥ درجة):

* اثبت أن جميع النظم في الفضاء الخطي المنظم ذي n بعداً تكون متكافئة فيما بينها .

السؤال الثاني (٢٠ درجة):

بفرض أن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عناصر متعامدة مثنى مثنى في الفضاء H ومغايرة للصفر برهن صحة مساواة فيثاغورث :

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$$

السؤال الثالث (١٥ درجة):

لتكن $h_1, h_2, h_3, \ldots$ جملة متعامدة نظامية في فضاء هيلبرت H. اثبت إذا كان $\langle x, h_k \rangle = 0$ فإن $x = \theta$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ إذا وفقط إذا كانت الجملة $h_1, h_2, h_3, \ldots$ تامة في H .

السؤال الرابع (١٥ درجة):

برهن أن جميع فضاءات هيلبرت المفصولة وغير المنتهية البعد إيزومورفية مع الفضاء ℓ_2 وبالتالي جميع هذه الفضاءات إيزومورفية لبعضها البعض .

السؤال الخامس (٢٠ درجة):

ليكن x, y عنصرين من فضاء هيلبرت برهن صحة التكافؤ :

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\| \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

($\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة) .

السؤال السادس (١٥ درجة):

اثبت أن للمعادلة التكاملية :

$$x(t) = \lambda \int_a^t k(t,u)\, x(u)\, du + \Phi(t)$$

حل وحيد $x(t)$ مستمرّ على المجال $[a,b]$، حيث $k(t,u)$ تابع مستمر على المربع $[a,b] \times [a,b]$ و λ وسيط اختياري و $\Phi(t)$ تابع مستمر على المجال $[a,b]$.

صـ٦١ الأمثلة (المجموعة المستطيلة) للأخير

صـ٦٢

صـ٦٤ ملاحظة ١٨) غير مطلوبة والباقي مطلوب

٦٦ مبرهنة بدون إثبات (١٧)

٦٥ استمرارية

٦٧ تصنيف المقطع

٦٨ أمثلة

٦٩ تعاريف لأمثلة

٧٠ مثال مطلوب (١٤)

٧١ التطبيق الضاغط، باناخ نص النص

٧٢ الإثبات غير مطلوب

٧٣ ملاحظات (١٢) و (١٤) ومثال (١٦)

٧٤ مثال (١٧) بدون الإثبات

٧٦ نص المثال بدون الحل (١٨)

٧٨ المبرهنة مع الإثبات

٨٠ التعريف مطلوب (٢) و (٣) غير مطلوب

١١٦ الطبقة المترية ل ١١٧ قبل النتيجة (مهم)

١١٥ أمثلة مطالعة

١١٨-١١٩ لغاية المثال (٩)

هلا م رياض